

一. 試求下列各極限值：(每小題 6%，共 18%)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 x}{x}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

二. 設  $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x < 1; \\ 2, & x = 1; \\ x^2+b, & x > 1. \end{cases}$

(1) 試求  $a, b$  之值，使得  $f$  在  $x=1$  為連續。 (10%)

(2) 是否存在  $a, b$  值，使得  $f$  在  $x=1$  為可微分。 (10%)

三. 設  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  為連續函數，試證明：

(1) 存在  $p \in [0, 1]$ ，使得  $f(p) = p$ 。 (10%)

(2) 若  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{5}$ ，則方程式  $f(x) - \frac{1}{5} = 0$  有實數根。 (10%)

四. 試求  $f(x) = \ln(1+x)$  在  $a=0$  的泰勒級數(Taylor series)，並求其收斂

區間。 (18%)

五. 設  $f(x, y) = xe^{x+y}$ ，

(1) 試求  $f$  在點  $(0, 0)$  的偏導數  $f_x(0, 0)$  及  $f_y(0, 0)$ ； (8%)

(2) 試求曲面  $z = f(x, y)$  在點  $(0, 0)$  的切平面方程式； (3%)

(3) 試求  $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$ 。 (8%)