

# 連桿組機構之可旋轉範圍的解析

## The Analysis of Motion Region of Linkage Mechanism

計畫編號：NSC 89-2218-E-034-002

執行期限：89 年 8 月 1 日至 90 年 7 月 31 日

主持人：鐘文遠 [wchung@faculty.pccu.edu.tw](mailto:wchung@faculty.pccu.edu.tw)

執行單位：中國文化大學機械工程學系

### 一、中文摘要

本文對四連桿機構，解析其輸入桿及輸出桿之可運動範圍。以 RSSR 四連桿組為出發點，將此連桿機構分解為二台機械臂。其可分別到達之點的集合，則形成一環面及一圓等兩個工作空間。再將此二工作空間之交集予以分析，以研判輸出入桿的可運動範圍及能否完全旋轉。

對於 RSSR 四連桿組，可推得一不等式。符合該不等式之輸出角，即為輸出桿之可運動範圍。如平面四連桿組之特例，該不等式經解析歸納，可推得與 Grashof 氏定理完全相同之結論。至於球面四連桿組，經推導後的不等式頗為簡易，僅含有連桿夾角之和或差的餘弦函數。不僅適於程式之撰寫，亦適於一般計算工具。

### Abstract

The mobility region of the input and output links of a four-bar was analyzed. The RSSR linkage is the main object of this project. By treating the mechanism as two manipulators, the working volumes of both manipulators are a torus and a circle, separately. The mobility region can then be found out and also the type can be determined from the intersection region of the torus and the circle.

A main inequality was derived based on the intersection region of two working volumes. The range of the angle of the linkage that can satisfy this inequality is the mobility region. The Grashof's rule has been derived for the planar four-bar. Concise inequalities, applicable for hand calculation, were proposed for the spherical four-bar as

well.

### 二、計畫緣由及目的

四連桿組為最常見之連桿機構，依幾何架構可區分為平面、球面及空間等三類；而依輸入桿及輸出桿能否作完全旋轉，各類四連桿組機構又可再區分為：(1) 曲柄搖桿機構。(2) 雙搖桿機構。(3) 雙曲柄機構。如何迅速判別輸入桿及輸出桿能否作完全旋轉，向來為探討連桿組機構之最基本課題之一。

對於平面之四連桿機構，只須將連桿組中各桿之長度，代入一般熟知之 Grashof 氏定理 [Barker, 1985; Paul, 1979]，便可判別輸入桿或輸出桿能否作完全旋轉。而由判別式推得之不等式亦可用以說明 Grashof 氏定理 [Williams and Reinholtz, 1986]。將除耦桿外之各桿尺寸固定，當輸入桿於不同角度時，求得可使連桿組連接之耦桿長度範圍，所作之圖，則可輔助四連桿機構之設計 [Gupta and Radcliffe, 1971; Suh and Radcliffe, 1978]。對於球面四連桿機構，連桿之長度則以連桿間之四個夾角表示，再配合補連桿組之特性，Grashof 氏定理仍有其適用性 [Chiang, 1988]。由平面四連桿組或球面四連桿組之運動方程式，予以分析，分別推導出三或四個判別式，可用於四連桿組輸入桿或輸出桿能否作完全旋轉之分類 [Murray and Larochelle, 1998]。

空間四連桿機構中，較為簡易且相關研究較多者之一為 RSSR 四連桿組。平面四連桿組和球面四連桿組即為其特例。除簡易型之 RSSR 四連桿組 [Zhang and

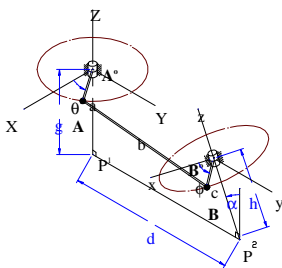
Zhang, 1993]與特例外,描述一般之 RSSR 四連桿組共需 7 個變數,分析過程頗為繁瑣耗時 [Freudenstein and Kiss, 1969; Freudenstein and Primrose, 1976];另外用以判別之方程式至少為四次而不易於應用 [Nolle, 1969; Bottema, 1971; Kazerounian and Solecki, 1993]。

本文以一般型之 RSSR 四連桿組為啟始。解析時不似多數研究以位移方程式為出發點。而是將連桿機構分解為二台機械臂。應用機器人學中工作空間 (working volume) [Craig, 1989] 的概念,對兩工作空間的交集加以分析,以判別輸入桿或輸出桿能否作完全旋轉。

### 三、研究方法

#### (1). RSSR 連桿機構

RSSR 為最常見且最常被研究之空間四連桿機構。如圖一所示,  $A_0A$  為輸入桿,其桿長為  $a$ ,且以  $A_0$  之旋轉對 (revolute pair) 繞著  $Z$  軸旋轉;而輸出桿  $B_0B$  之桿長為  $c$ ,以  $B_0$  之旋轉對繞著  $z$  軸旋轉。耦桿  $AB$  之桿長為  $b$ ,  $A$  及  $B$  皆為球面對 (spherical pair),  $Z$  軸與  $z$  軸之距離  $\overline{P_1P_2}$  為  $d$ ,且夾角為  $\alpha$ 。點  $A_0$  與  $P_1$  之距離為  $g$ ,點  $B_0$  與  $P_2$  之距離為  $h$ 。 $d$ 、 $\alpha$ 、 $g$  和  $h$  皆以圖一所示為正。另外,  $Y$  軸平行於兩旋轉軸 ( $Z$  軸及  $z$  軸) 之公垂線 ( $P_1P_2$ );  $XYZ$  坐標系之原點為  $A_0$ 。 $y$  軸平行於  $Y$  軸且  $xyz$  坐標系之原點為  $B_0$ 。



圖一：空間 RSSR 四連桿機構

現將 RSSR 連桿機構中,耦桿與輸出桿之點  $B$  球面對暫時拆離;則 RSSR 連桿機構可視為二座機械臂。其一為輸入桿與

耦桿之具有四個旋轉自由度的機械臂,若各旋轉對皆可完全旋轉,則末端  $B$  點可到之處的集合,亦即該機械臂之工作空間,乃為一環面 (torus) [Skreiner, 1967; Hunt, 1978]。以  $XYZ$  坐標系表示,該環面所包含之空間可寫為

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 - (a^2 + b^2))^2 \leq 4a^2(b^2 - Z^2) \quad (1)$$

另一機械臂為僅具一旋轉自由度的輸出桿,末端  $B$  點所形成之工作空間為一圓。以  $xyz$  坐標系表示,該圓可表示成

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad (2)$$

藉由上述兩機械臂之工作空間的交集,可分析 RSSR 連桿機構之運動範圍。如整個圓皆於環面內,既表該連桿機構之輸出桿為曲柄,可做完全旋轉;如僅部分圓於環面內,則表該連桿機構之輸出桿為搖桿,僅可做部分旋轉。由於輸出桿之圓位於  $xyz$  坐標系中之  $x-y$  平面;於分析圓與環面之交集時,僅須就環面於  $x-y$  平面之部分與式(2)之圓加以分析。因此解析輸出桿之運動範圍時,在幾何觀點上,僅為平面或二維之問題。

環面於  $x-y$  平面之方程可藉由兩坐標系之關係加以推導。則得

$$(x^2 + y^2 + 2g \sin \alpha x + 2dy - a^2 - b^2 + d^2 + g^2 + h^2 - 2gh \cos \alpha)^2 \leq 4a^2(b^2 - (\sin \alpha x + g - h \cos \alpha)^2) \quad (3)$$

輸出桿之運動範圍可就式(2)及式(3)之交集加以分析。將式(2)中  $x$  及  $y$  分別以  $x = c \cos \phi$ 、 $y = c \sin \phi$  表示,角度  $\phi$  為輸出角,代入式(3)後,可得

$$C_{ss} \sin^2 \phi + C_{sc} \sin \phi \cos \phi + C_{cc} \cos^2 \phi + C_s \sin \phi + C_c \cos \phi + C_0 \leq 0 \quad (4)$$

符合式(4)之角度  $\phi$  的範圍即代表輸出桿之可運動範圍。

#### (2). 平面四連桿機構

平面四連桿為 RSSR 連桿組之一特例。如圖一中,當  $g=h=0$  且  $\alpha=0$ ,RSSR 連桿組即成為平面四連桿組。式(4)之係數

中，因  $C_{sc} = C_{cc} = C_c = 0$ ，可簡化並改寫為

$$f(\sin \phi) = C_{ss} \sin^2 \phi + C_s \sin \phi + C_0 \leq 0 \quad (5)$$

觀察式(5)，其乃為一元二次方程式。當對任何  $\phi$  值，式(5)皆成立時，便表示輸出桿可做完全旋轉。由於  $C_{ss} = 4d^2c^2 > 0$ ， $f(\sin \phi) = 0$  時為一開口向上之二次曲線。又因為  $\sin \phi$  介於 1 與 -1 之間，所以只要兩判別式  $f(1)$  及  $f(-1)$  皆小於或等於零，式(5)對任何  $\phi$  值皆可符合。令  $\sin \phi = 1$ ，即  $f(1) \leq 0$ ，可得

$$(a-b)^2 \leq (c+d)^2 \leq (a+b)^2 \quad (6)$$

當  $f(-1) \leq 0$ ，則可得

$$(a-b)^2 \leq (c-d)^2 \leq (a+b)^2 \quad (7)$$

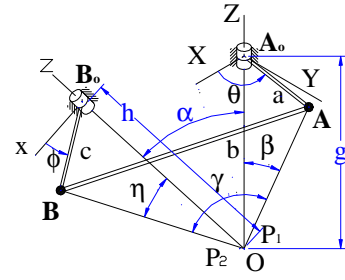
因此，對於平面四連桿組，只要式(6)及式(7)符合，既表輸出桿為曲柄。

對於平面之四連桿機構，一般只須將連桿組中各桿之長度，代入熟知之 Grashof 氏定理 [Barker, 1985; Paul, 1979]，便可判別輸入桿或輸出桿能否作完全旋轉。而若對式(6)及式(7)加以探討，亦可得  $c$  或  $d$  須為最小，且最短桿與最長桿之桿長和須小於另二桿之和。

另一方面，若欲輸入桿可完全旋轉，分析時僅須將  $a$  與  $c$  交換，所得結論將為  $a$  或  $d$  須為最小且最短桿與最長桿之桿長和須小於另二桿之和。由此可見，本方法對於平面四連桿組之結論與 Grashof 氏定理完全相符。

### (3). 球面四連桿機構

球面四連桿亦可由 RSSR 連桿組簡化而得。當圖一中之兩旋轉軸線相交，也就是當  $d=0$  時，既成為圖二中之 RSSR 型之球面四連桿組。 $P_1$  與  $P_2$  重合於兩旋轉軸線之交點，且令為  $O$ ； $A_0O$  與  $B_0O$  之夾角即為  $\alpha$ 。另外再設  $A_0O$  與  $AO$  之夾角為  $\beta$ ； $AO$  與  $BO$  之夾角為  $\gamma$ ； $BO$  與  $B_0O$  之夾角為  $\eta$ 。



圖二：RSSR 型之球面四連桿組

對於 RSSR 型球面四連桿組輸出桿之可運動範圍的解析，可使用典型球面四連桿組，再代入式(4)加以分析。假設連桿組各接頭點皆位於單位球面上，則  $a = \sin \beta$ 、 $g = \cos \beta$ 、 $c = \sin \eta$ 、 $h = \cos \eta$ 、 $d=0$  及  $b^2 = 2 - 2 \cos \gamma$ 。式(4)之係數中，因  $d=0$ ， $C_{ss} = C_{sc} = C_s = 0$ ，可改寫為

$$g(\cos \phi) = C_{cc} \cos^2 \phi + C_c \cos \phi + C_0 \leq 0 \quad (8)$$

由式(8)可分析輸出桿之可運動範圍。如同平面連桿組中之式(5)，由於  $C_{cc} > 0$ ，故只要式(8)中  $g(1) \leq 0$  且  $g(-1) \leq 0$ ，輸出桿便可完全旋轉。當  $g(1) \leq 0$ ，經整理可得

$$(\cos(\alpha + \eta) - \cos(\beta + \gamma))(\cos(\alpha + \eta) - \cos(\beta - \gamma)) \leq 0 \quad (9)$$

當  $g(-1) \leq 0$ ，則可得

$$(\cos(\alpha - \eta) - \cos(\beta + \gamma))(\cos(\alpha - \eta) - \cos(\beta - \gamma)) \leq 0 \quad (10)$$

觀察式(9)及式(10)，可發現固定桿角度  $\alpha$  與輸出桿角度  $\eta$  之差以及和之餘弦值，皆須介於另二桿角度之差及和之餘弦值之間。另外，輸入桿可完全旋轉之條件則可推得為

$$\begin{aligned} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\eta + \gamma))(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\eta - \gamma)) &\leq 0 \\ (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\eta + \gamma))(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\eta - \gamma)) &\leq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

## 四、結論與成果

對於平面四連桿組所推得之式(6)及式(7)，再經由歸納分析，可得與 Grashof 氏定理完全相符之結果。但於應用上，則應

仍以使用 Grashof 氏定理較為簡易。至於球面四連桿組，若欲使用 Grashof 氏定理，對於連桿角度較大時，可能須依球面四連桿之補連桿組特性，先加以適度調整。然而若使用式(9)~(11)，則可將角度直接代入，由不等式是否符合，判斷輸入桿與輸出桿能否完全旋轉；較適於程式之撰寫。另外，亦可將兩角度之和或差調整於  $0^\circ \sim 180^\circ$ ，則運算過程僅須簡易之加減，可適合於一般之計算工具。

由 RSSR 連桿組所推導出之式(4)，為包含正弦與餘弦之二次方程式，若  $\sin \phi$  與  $\cos \phi$  皆以  $\tan \frac{\phi}{2}$  表示時，則將成為以  $\tan \frac{\phi}{2}$  為變數之四次方程式，其分析方式與相關文獻類似 [Nolle, 1969]。另一方面，若從平面幾何觀點，式(4)可視為如橢圓之二次曲線與單位圓之交集。單位圓位於二次曲線內之部分，即為輸出桿之可轉動範圍。若單位圓完全包含於二次曲線，則輸出桿為曲柄。對於平面或球面之特例，二次曲線則成為兩條直線，可經簡易分析而得前述結果。次一階段，將可對當  $C_{sc} = 0$  時之情況加以探討，式(4)代表的二次曲線將可能為正橢圓或正雙曲線。而後，再對一般狀況，試圖提出可供應用之分析或判別的策略。

## 五、參考文獻

1. Barker, C. R., 1985, "A Complete Classification of Planar Four-Bar Linkages," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 20, No. 6, pp. 535-554.
2. Bottema, O., 1971, "The Motion of the Skew Four-Bar," *Journal of Mechanisms*, Vol. 6, pp. 69-79.
3. Chiang, C. H., 1988, *Kinematics of Spherical Mechanisms*, Cambridge University Press.
4. Craig, J. J., 1989, *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, Addison-Wesley Publishing Company.
5. Freudenstein, F. and Kiss, I., 1969, "Type

- Determination of Skew Four-Bar Mechanisms," *Transaction of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, pp. 220-224.
6. Freudenstein, F. and Primrose, E., 1976, "On the Criteria for the rotatability of the Cranks of Skew Four-Bar Linkage," *Transaction of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, pp. 1285-1288.
7. Gupta, V. and Radcliffe, C., 1971, "Mobility Analysis of Plane and Spatial Mechanisms," *Transaction of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, pp. 125-130.
8. Hunt, K. H., 1978, *Kinematic Geometry of Mechanisms*, Oxford University Press.
9. Kazerounian, K. and Solecki, R., 1993, "Mobility Analysis of General Bi-Modal Four-Bar Linkages Based on Their Transmission Angle," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 28, No. 3, pp. 437-445.
10. Murray, A. and Larochelle P., 1998, "A Classification Scheme for Planar 4R, Spherical 4R, and Spatial RCCC Linkages to Facilitate Computer Animation," *DETC98/MECH-5887*, ASME Design Engineering Technical Conferences.
11. Nolle, H., 1969, "Ranges of Motion Transfer by the R-G-G-R Linkage," *Journal of Mechanisms*, Vol. 4, pp. 145-157.
12. Paul, B., 1979, "A Reassessment of Grashof's Criterion," *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 101, pp. 515-518.
13. Skreiner, M., 1967, "Methods to Identify the Mobility Regions of Four-link Mechanism," *Journal of Mechanisms*, Vol. 2, pp. 415-427.
14. Suh, C. H. and Radcliffe, C. W., 1978, *Kinematics and Mechanisms Design*, John Wiley & Sons.
15. Williams, R. L. and Reinholtz, C. F., 1986, "Proof of Grashof's Law Using Polynomial Discriminants," *Transactions of the ASME, Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 108, pp. 562-564.
16. Zhang, W. and Zhang D., 1993, "Conditions of Crank Existence for a Particular Case of the RSSR Linkage," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 28, No. 6, pp. 845-850.