

中國文化大學 103 學年度暑假轉學招生考試

系組：應用數學系三年級

日期節次：7 月 30 日第 1 節 09:00-10:20

科目：線性代數

1 是非題(15%)

- (a) 若線性聯立方程組 $Ax = b$ 有解, A 為 $m \times n$ 矩陣, x 為 $n \times 1$ 的向量, 則解為唯一。
- (b) 若 $x_1, x_2, \dots, x_n \in R^n$, 其中一個向量為零向量, 則 x_1, x_2, \dots, x_n 為線性相依。
- (c) $\{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_i \in R, i = 1, 2, 3\}$ 為 R^3 的子空間。
- (d) 零向量可以是一個方陣的特徵向量。
- (e) 零可以是一個方陣的特徵值。

$$2 A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 求 } A^{-1} \quad (15\%)$$

$$3 \text{ 求聯立方程組 } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 5 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 8 \end{cases} \text{ 的全解(complete solutions)} \\ (15\%)$$

$$4 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 6 \end{bmatrix} \text{ (a) 將 } A \text{ 化成列簡梯陣(row-reduced echelon form)(5\%)$$

(b) 利用(a)求 A 的零核空間和行空間的一組基底(10%)

$$5 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 求 } A \text{ 的 } QR \text{ 分解, } Q \text{ 為正交方陣, } R \text{ 為上三角矩陣(15\%)}$$

$$6 A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ (a) 試證可以找到一個可逆方陣 } P \text{ 使得 } P^{-1}AP \text{ 為對角方陣(10\%) (b) 求 } P \text{ (5\%)}$$

$$7 T: R^3 \rightarrow R^2, T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \end{bmatrix}, \text{ 求 } T \text{ 以標準基底的矩陣表示法}$$

(10%)