

1. 在一雙占 (duopoly) 市場中，試以某產品之市場需求函數 $P = a - Q$ (P 為價格， Q 為需求量， a 則為某常數)，分別導出在 Cournot 模型及 Bertrand 模型下 A、B 兩廠商之反應函數及其均衡解，並以圖形表示之。(假設 A、B 兩廠商所生產之產品為同質產品，且 A、B 之成本函數均為 $TC = b \cdot Q$ ，其中 b 為其常數) (25%)
2. 假設一學生有一固定所得 (income) 6000 元，該生可在學校選課學習 (每學分 200 元)，也可將其所得花在其他商品上 (假設價格為 1 元)。且該生對這兩個選擇的偏好呈現邊際替代率遞減，也就是其無異曲線為嚴格凸向原點。現假設該生選擇在校選修 15 個學分共 3000 元，則
- 如果學校現在改變政策，以不管學生選修多少學分，一律收取一學期 3000 元 (最多到 30 學分)。試以圖形表示該生原來的預算線及政策改變後的預算線。(請將學分數置於橫軸) (9%)
 - 學校政策改變後，該生是否會改變其選修的學分數？(請解釋) (8%)
 - 如果該生在政策改變前只選修 6 個學分 (而不是 15 個學分)，則政策改變後，該生是否會改變原先其選修學分數的決定？(請解釋) (8%)
3. 假設一生產函數 $q = (2M + F)^{0.5}$ ，其中 M 及 F 分別為男性勞工及女性勞工數。請回答下列問題：
- 其生產規模報酬為遞增、遞減或固定？ (5%)
 - 假設男性勞工薪資 $P_M = \$1$ ，女性勞工薪資 $P_F = \$0.51$ ，且公司目前共生產 $q = 6$ 的產量。請求其成本最小下之生產要素組合=? (6%)
 - 求其成本函數=? 當 $q = 6$ 時，總成本=? (7%)
 - 如果此產品在完全競爭市場下的價格為 $\$100$ ，則此公司應生產多少產量？又公司之利潤=? (7%)
4. 設一廠商之生產函數為 $Q = LK - L^2$ (其中 L 為勞動數量， K 為資本；且 K 在短期下為固定)。則
- 試證明其勞動 (L) 之邊際產量 (MP_L) 為遞減，但該廠商之生產規模報酬 (returns to scale) 為遞增。 (12%)
 - 求短期勞動需求函數及長期勞動需求函數。(令產品價格為 P ，勞動及資本的價格分別為 w 及 r) (13%)

一、(75%) 多重選擇題 (每題答案包含一至四個選項, 必需全部答對才給分):

1. 以 X_1, \dots, X_n 代表樣本觀察值, n 為樣本數, $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i / n$ 是樣本平均數, 下列何者可測度資料的變異性: (a) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n) / n - 1$ (b) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 / n$ (c) $\sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}_n| / n - 1$ (d) $\max(X_1, X_2, \dots, X_n) - \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
2. 下列敘述何者正確: (a) 右偏的分配下, 中位數大於平均數 (b) 左偏的分配下, 眾數大於平均數 (c) 右偏的分配下, 眾數小於平均數 (d) 左偏的分配下, 平均數大於中位數.
3. 令 A 和 B 為同一出象空間中的兩個事件, $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$, 令 A^c , B^c 分別是 A , B 的補集合或餘集合, 令 A^c , B^c 分別是 A , B 的補集合或餘集合, 請選出正確的選項: (a) 若 A , B 為互斥事件, $P(A \cup B) = 0.8$ (b) 若 $A \subseteq B$, $P(A \cap B) = 0.2$ (c) 若 $P(B|A) = 1$, $P(A \cup B) = 0.3$ (d) 若 $A \subseteq B^c$, $P(A \cap B) = 0$.
4. 隨機變數 X 在區間 $[0, 4]$ 呈均等分配, (a) 隨機變數 X 的機率密度函數為 $f(X) = 1/4$ (b) 隨機變數 X 的均數為 2 (c) 隨機變數 X 的變異數為 $4/3$ (d) 令 $Y = X^2$, 則 Y 為區間 $[0, 16]$ 上的均等分配.
5. 下列那些分配的機率密度函數未對稱於原點: (a) 區間 $[-1, 1]$ 上的均等分配 (b) $t(5)$ (c) $N(0, 4)$ (d) $F(40, 40)$.
6. 令 X 為隨機變數, $E(X)$ 和 $Var(X)$ 分別代表 X 的均數和變異數, (a) 對任意實數 a 和 b , $E(aX + b) = aE(X) + b$ (b) 對任意實數 c , $Var(cX) = cVar(X)$ (c) $Var(X) = [E(X)]^2 - E(X^2)$ (d) 對所有的實數 $d > 0$, $P(\{|X - E(X)| \geq d\}) \leq Var(X)/d$.
7. 令 X 和 Y 為兩個隨機變數, (a) 對任意實數 a , b , c 和 d , $Cov(aX + b, cY + d) = ac \cdot Cov(X, Y)$ (b) 對任意實數 a 和 b , $Corr(aX, bY) = ab \cdot Corr(X, Y)$ (c) $Cov(X, Y)^2 \leq Var(X) \cdot Var(Y)$ (d) $Var(X) \leq E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y))$.
8. 請選出錯誤的選項: (a) Z_1, \dots, Z_n 為 n 個相互獨立之標準常態隨機變數, $Z_1^2 + \dots + Z_n^2 \sim \chi^2(n)$ (b) $t(n)^2$ 與 $F(1, n)$ 是相同的分配 (c) 當二項分配之參數 n 很大而 p 很小時, 二項機率密度函數收斂到波氏機率函數 (d) $Z \sim \chi^2(m)$ 與 $Y \sim \chi^2(n)$ 相互獨立, $Z/Y \sim F(m, n)$.
9. 下列敘述何者正確: (a) 若 X 和 Y 兩個相互獨立的隨機變數皆為二項分配, $X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$, 則隨機變數 $X + Y$ 也是二項分配, $X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$ (b) 超幾何隨機變數 $X \sim HG(M, N, n)$, 均數 $E(X) = nM/(M + N)$ (c) 若 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ 波氏分配, 則期望值 $E(X) = \lambda$, 變異數 $Var(X) = \lambda$ (d) 若 $X \sim \chi^2(n)$ 卡方分配, 則期望值 $E(X) = n$, 變異數 $Var(X) = n^2$.
10. 下列敘述何者正確: (a) 不偏估計式經過線性和非線性函數轉換都依然保持不偏性 (b) 一致性和不偏性無必然關係 (c) 不論線性或非線性的連續函數

11. 令 $X_i, i = 1, \dots, n$, 為彼此獨立且具有相同分配的隨機變數, 其共同的均數為 μ_0 , 變異數為 σ_0^2 , (a) $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$ 是 μ_0 的不偏且一致性估計式, (b) $[\max(X_1, \dots, X_n) - \min(X_1, \dots, X_n)]/2$ 是 μ_0 的一致性估計式, (c) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2/n$ 是 σ_0^2 的不偏性估計式, (d) $(X_1 + X_n)/2$ 是 μ_0 的不偏性估計式。
12. 請選出正確的選項: (a) 檢定統計量之檢定力等於 1 減去型 2 誤差機率, (b) 給定顯著水準 5%, 若檢定統計量在單邊檢定下拒絕虛無假設, 相同統計量在雙邊檢定下一定也能拒絕虛無假設, (c) 型 1 誤差與型 2 誤差存在彼此消長的關係, (d) 檢定統計量之檢定力與型 1 誤差無關。
13. 當線性迴歸模型設定為: $Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i, i = 1, \dots, n$, $\hat{\alpha}_n$ 和 $\hat{\beta}_n$ 代表 α 和 β 的最小平方估計式, \hat{Y}_i 是最小平方方法之下估計的應變數, X_i 和 Y_i 資料改變為 X_i^* 和 Y_i^* 後, 令 \hat{Y}_i^* 代表利用新資料計算出來新的估計應變數, (a) $X_i^* = X_i + c$ 且實數 $c \neq 0$, 則 $\hat{Y}_i^* = \hat{Y}_i + c\hat{\beta}_n$, (b) $Y_i^* = Y_i + c$ 和 $X_i^* = X_i + c$ 且實數 $c \neq 0$, 則 $\hat{Y}_i^* = \hat{Y}_i + c$, (c) $Y_i^* = cY_i$ 且實數 $c \neq 0$, 則 $\hat{Y}_i^* = \hat{Y}_i$, (d) $X_i^* = cX_i$ 且實數 $c \neq 0$, 則 $\hat{Y}_i^* = c\hat{Y}_i$ 。
14. 令線性迴歸模型為不含截距項的 $Y_i = \beta X_i + U_i, i = 1, \dots, n$, $\hat{\beta}_n$ 是 β 的最小平方估計式, \hat{U}_i 和 \hat{Y}_i 分別為第 i 個殘差和估計的應變數, 下列敘述何者有誤? (a) $\sum_{i=1}^n X_i \hat{U}_i = 0$, (b) $\bar{\hat{Y}}_n$ 和 \bar{X}_n 分別是 \hat{Y}_i 和 X_i 的算術平均數, $\bar{\hat{Y}}_n = \hat{\beta}_n \bar{X}_n$, (c) $\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i \hat{U}_i = 0$, (d) \bar{Y}_n 和 $\bar{\hat{Y}}_n$ 的算術平均數相等。
15. X_i 和 Y_i 為線性迴歸模型中的解釋變數和應變數, (a) 置中的判定係數就是 X_i 和 Y_i 間樣本相關係數的平方, (b) 置中的判定係數不受 Y_i 的位置變動或比例變動影響, (c) Y_i 的位置變動會改變非置中的判定係數, (d) Y_i 的比例變動不會改變非置中的判定係數。

二、(25%) 計算題:

1. (10%) 令 X_1, \dots, X_n 為樣本觀察值, n 是樣本數, $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$ 為樣本平均數, 請證明:

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n) X_i = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

2. (15%) 若 $\{X_1, \dots, X_{100}\}$ 為一組抽取自 $N(\mu_0, 9)$ 常態分配的 i.i.d. 隨機樣本, (a) 若欲檢定虛無假設 $\mu_0 = 0$, 請問檢定統計量為何? (b) 給定顯著水準 5%, 上小題的檢定統計量在 $\mu_0 = 3$ 之下的分配為何? 請計算此時的型 2 誤差。

問答題 (共 100 分)

1. The accumulation of external debt is a common phenomenon of developing countries at the stage of economic development where the supply of domestic savings is low and current account payments deficits are high. Please discuss the pros and cons of employing the fixed exchange rate system in this situation. (15 分)

2. 假設 A 國的生產函數為 Cobb-Douglas: $Y = AK^bN^{1-b}$ 或 $Y/N = A(K/N)^b$, 其具固定規模報酬特徵。

(1) 說明生產函數中的 b 即為資本份額 (capital share in the total GDP), b 亦為資本的產出彈性 (elasticity of output with respect to the capital input)。 (10 分)

(2) 假設 n 為勞動力 N 的成長率, k 為資本 K 的成長率。(即 $k = \Delta K / K$; $n = \Delta N / N$)。根據儲蓄等於投資的等式, 請導出 Solow 成長理論的模型。並討論 Solow 成長理論的缺點、及其無法解釋的現象。(15 分)

3. 在一個開放的經濟體系 (open economy) 中, 假設價格不變之下, 試說明財政政策、貨幣政策分別在何種情況之下有效、無效。除文字說明外, 並請以 IS、LM 曲線畫圖說明。(25 分)

4. 在下列假設之下, 請列出 IS、LM 曲線的方程式, 並計算均衡所得與均衡利率。(15 分)

$$C = C_0 + 0.75(Y - I)$$

$$C_0 = 800 - 25r$$

$$T = 400 - 0.2Y$$

$$I_p = 600 - 25r$$

$$G = 1200$$

$$NX = 200 - 0.1Y$$

$$(M/P)^d = 0.2Y - 20r$$

$$M^s/P = 800。$$

5. 通貨膨脹率與失業率在短期內常呈現反向關係, 說明為何通貨膨脹率與失業率在長期不見這種關係。(10 分)

6. Both the life-cycle hypothesis and the permanent income hypothesis predict that the marginal propensity to consume out of transitory income is quite small. However, we observe many younger families spending a fairly large percentage of their transitory incomes. Is this observation consistent with the two hypotheses? (10 分)